Københavns Universitets Økonomiske Institut

Kandidatstudiet 2020 V-K DM ex ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Torsdag den 16. januar 2020

Opgave 1. Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 8z + 4.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 8\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 4x = 0,$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 8\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 4x = 50e^t + 4t^2 + 24t + 44.$$

(1) Vis, at

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = (z^2 + 2z + 2)^2.$$

Bestem dernæst samtlige rødder i polynomiet P, og angiv deres multipliciteter.

Løsning. Ved almindelig udgangning af parenteser får man resultatet

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 8z + 4 = (z^2 + 2z + 2)^2.$$

Idet

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Leftrightarrow z = -1 \pm i,$$

så polynomiet P har rødderne $z_1 = -1 + i$ og $z_2 = -1 - i$, der begge har multipliciteten 2.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$, og afgør om denne differentialligning er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Vi ser straks, at

$$x = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\sin t + c_3 t e^{-t}\cos t + c_4 t e^{-t}\sin t,$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

Da realdelen for de karakteristiske rødder er -1, er differentialligningen $(*)$ globalt asymptotisk stabil.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. Vi gætter først på en løsning af formen $\hat{x}_1 = ke^t$, og ved indsættelse finder vi, at $k = 2$. Dernæst gætter vi på en løsning af formen $\hat{x}_2 = At^2 + Bt + C$. Idet $\hat{x}_2' = 2At + B$, $\hat{x}_2'' = 2A$ og $\hat{x}_2''' = \hat{x}_2'''' = 0$, finder vi, at

$$4At^2 + (16A + 4B)t + (16A + 8B + 4C) = 4t^2 + 24t + 44 \Rightarrow$$

$$A = 1 \wedge B = 2 \wedge C = 3.$$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$ er derfor

$$x = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\sin t + c_3 t e^{-t}\cos t + c_4 t e^{-t}\sin t + 2e^t + t^2 + 2t + 3,$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

For ethvert $s \in \mathbf{R}$ betragter vi den homogene, lineære differentialligning

$$(***) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^3x}{dt^3} + 2s\frac{d^2x}{dt^2} + s\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

(4) Opstil Routh-Hurwitz matricen $A_4(s)$ for differentialligningen $(***)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, hvor $(***)$ er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Vi ser, at

$$A_4(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 & 0 \\ 1 & 2s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 2s & 1 \end{pmatrix}.$$

De ledende hovedunderdeterminanter er $D_1 = 1, D_2 = s, D_3 = D_4 = s^2 - 1$, og disse skal alle være positive, hvis differentialligningen $(***)$ skal være globalt asymptotisk stabil. Vi ser, at dette er opfyldt, når og kun når $s > 1$.

Opgave 2. Vi betragter den funktion $f : \mathbf{C} \setminus \{-i, i\} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : f(z) = \frac{z}{z^2+1}.$$

(1) Udregn funktionsværdierne $f(1+i)$ og $f(2i)$.

Løsning. Vi udregner, at

$$f(1+i) = \frac{1+i}{(1+i)^2+1} = \frac{1+i}{1+2i} = \frac{(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i,$$

og

$$f(2i) = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i.$$

(2) Løs ligningen $f(z) = 1$.

Løsning. Vi får, at

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z^2+1} = 1 \Leftarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

(3) Løs ligningen

$$f(z) = f(\overline{z}).$$

Løsning. Vi ser, at

$$f(z) = f(\overline{z}) \Leftrightarrow \frac{z}{z^2+1} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}^2+1} \Leftrightarrow z\overline{z}^2 + z = \overline{z}z^2 + \overline{z} \Leftrightarrow z\overline{z}(\overline{z} - z) = \overline{z} - z.$$

Heraf fremgår det, at alle reelle tal er løsninger, og ellers skal det gælde, at $z\overline{z} = 1$, så $|z| = 1$.

Samlet får vi så, at løsningen bliver $z \in \mathbf{R} \vee z \in \mathbf{T} \setminus \{-i, i\}$.

Vi betragter mængden

$$M = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}.$$

(4) Vis, at mængden

$$A = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z \leq 1\}$$

er afsluttet relativt til mængden M.

Løsning. Vi ser, at

$$A = M \cap \{z \in \mathbf{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\},$$

hvoraf påstanden aflæses.

(5) Bestem det indre A^O og randen ∂A af mængden A relativt til M.

Løsning. Vi finder, at

$$A^O = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\} \text{ og } \partial A = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z = 1\}.$$

(6) Afgør, om mængden A er kompakt relativt til M.

Løsning. For ethvert $n \in \mathbf{N}$ er mængden

$$G_n = \left\{z \in \mathbf{C} \mid \frac{1}{2n} < \operatorname{Re} z < 1 + \frac{1}{2n}\right\}$$

åben relativt til M, og vi ser, at

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbf{N}} G_n.$$

Desuden ser vi, at denne åbne overdækning af mængden A ikke kan udtyndes til en endelig åben overdækning af A. Dette viser så, at mængden A ikke er kompakt relativt til M.

Opgave 3. Vi betragter korrespondancen $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : F(x) = \begin{cases} [0,1], & \text{for } x < 0 \\ [0,2], & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ [-1,5] \cup \{7\}, & \text{for } x \geq 1 \end{cases}.$$

Desuden betragter vi funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, der har forskriften

$$\forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^2 x.$$

(1) Vis, at korrespondancen F har afsluttet graf egenskaben.

Løsning. Grafen for korrespondancen F er en afsluttet mængde i $\mathbf{R}^2$.

(2) Vis, at korrespondancen F ikke er nedad hemikontinuert.

Løsning. Vi betragter følgen $\left(-\frac{1}{k}\right)$, som er konvergent med grænseværdi 0. Der findes ingen følge (y_k), hvor $y_k \in F(x_k) = [0,1]$, og som er konvergent med $2 \in F(0)$ som grænseværdi.

Dette viser påstanden.

(3) Vis, at korrespondancen F er opad hemikontinuert.

Løsning. Dette er klart, thi F har afsluttet graf egenskaben, og $F(x) \subseteq [-1,7]$ for ethvert $x \in \mathbf{R}$.

(4) Bestem fikspunkterne for korrespondancen F.

Løsning. Mængden af alle fikspunkter er $\Phi = [0,5] \cup \{7\}$.

(5) Bestem en forskrift for den maksimale værdifunktion $v_u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : v_u(x) = \max\{f(x,y) \mid y \in F(x)\}.$$

Løsning. Vi finder, at

$$v_u(x) = \begin{cases} x^2, & \text{for } x < 0 \text{ med } y = 0 \\ 0, & \text{for } x = 0 \text{ med } y \in [0,2] \\ x^2 + 4x, & \text{for } 0 < x < 1 \text{ med } y = 2 \\ x^2 + 49x, & \text{for } x \geq 1 \text{ med } y = 7 \end{cases}.$$

(6) Bestem en forskrift for den tilhørende maksimale værdikorrespondance M_u.

Løsning. Vi ser, at

$$M_u(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{for } x < 0 \\ [0,2], & \text{for } x = 0 \\ \{2\}, & \text{for } 0 < x < 1 \\ \{7\}, & \text{for } x \geq 1 \end{cases}.$$

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^1 \Big(-x^2 + 2x - u^2 \Big)\, dt,$$

hvor $\dot{x} = f(t,x,u) = 2u$, og hvor man desuden har, at $x(0) = 1$ og $x(1) = 5$.

(1) Opstil Hamiltonfunktionen $H = H(t,x,u,p)$ for dette optimale kontrolproblem, og vis, at det er et maksimumsproblem.

Løsning. Vi opstiller Hamiltonfunktionen:

$$H = H(t,x,u,p) = -x^2 + 2x - u^2 + 2pu,$$

idet $\dot{x} = f(t,x,u) = 2u$.

Vi ser nu, at

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -2x + 2 = -\dot{p} \text{ og } \frac{\partial H}{\partial u} = -2u + 2p = 0,$$

hvoraf vi finder Hamiltonfunktionens Hessematrix

$$H'' = H''(x,u) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser, at denne matrix er negativ definit, og dermed er $H = H(x,u)$ en (endda strengt) konkav funktion. Dette viser, at der er tale om et maksimumsproblem.

(2) Bestem det optimale par (x^*, u^*) for dette optimale kontrolproblem.

Løsning. Vi finder straks, at $p = u$, så $\dot{p} = \dot{u}$.

Da er

$$-2x + 2 = -\dot{u} \Leftrightarrow -2x + 2 = -\frac{1}{2}\ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} - 4x = -4.$$

Vi ser, at en konstant løsning er $\hat{x} = 1$, og at det karakteristiske polynomium for den tilhørende homogene differentialligning er $P(\lambda) = \lambda^2 - 4$. Altså er de karakteristiske rødder $\lambda = \pm 2$. Da ser vi, at

$$x = Ae^{2t} + Be^{-2t} + 1, \text{ hvor } A, B \in \mathbf{R}.$$

Da $x(0) = 1$, får vi, at $B = -A$, og da $x(1) = 5$, får vi også, at $A = \frac{4}{e^2 - e^{-2}}$.

Så er

$$x^* = \frac{4}{e^2 - e^{-2}} \left(e^{2t} - e^{-2t} \right) + 1,$$

og endvidere er

$$\dot{x}^* = \frac{8}{e^2 - e^{-2}} \left(e^{2t} + e^{-2t} \right) \;\text{ og }\; \dot{u}^* = \frac{4}{e^2 - e^{-2}} \left(e^{2t} + e^{-2t} \right).$$